Баландин Антон Сергеевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, младший научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Balandin Anton Sergeevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Junior Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

УДК 517.977, 519.711

ОБ УСЛОВИЯХ НАБЛЮДАЕМОСТИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© **В.Р. Барсегян**

Ключевые слова: поэтапно меняющаяся линейная система, измерение, вполне наблюдаемость, условия вполне наблюдаемости.

Исследуется возможность полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного измерения. Получены необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных и стационарных систем. Показано, что на отдельных отрезках времени поэтапно меняющаяся система образованная не вполне наблюдаемыми стационарными системами может быть вполне наблюдаемой на всем отрезке времени.

Введение. Исследование многих прикладных задач процессов управления сводится к динамическим системам переменной структуры, таким как поэтапно меняющиеся системы, кусочно линейные импульсные системы и т. д. Задачи управления и наблюдения таких динамических систем имеют важные теоретическое и прикладное значения. Для реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать фазовое состояние системы в каждый момент времени. Так как обычно не все фазовые координаты системы доступны измерению, необходимо рассмотреть вопрос о возможности полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного наблюдения (измерения).

Управляемость и наблюдаемость – два фундаментальных понятия теории управления и являются принципиальными как в задачах для обычных систем [1–5], так и в задачах управления и наблюдения для поэтапно меняющихся систем. Вопросы управляемости и наблюдаемости указанных систем переменной структуры исследованы в работах [6–12]. В работах [7–9] получены необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной системы. В работах [11, 12] получены необходимое и достаточное условие для управляемости и наблюдаемости кусочно линейных импульсных управляемых систем.

В данной работе исследована возможность полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного наблюдения (измерения). Получены необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных и стационарных систем. Показано, что на отдельных отрезках времени поэтапно меняющаяся система образованная не вполне наблюдаемыми стационарными системами может быть вполне наблюдаемой на всем отрезке времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными нестационарными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2(t)x + B_2(t)u, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots \\ A_m(t)x + B_m(t)u, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{\ltimes}$, $x(t)$ — фазовый вектор системы; $A_k(t), B_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ управляющее воздействие, соответственно, с размерностями

$A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матрицы функций $A_k(t), B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются непрерывными функциями.

Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени t_k, $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$, конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, т. е. в моменты времени t_k

$$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k) \quad (k = 1, \ldots, m-1). \tag{1.2}$$

Через $y(t)$ обозначим вектор $y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_s(t)\big)^T$, компоненты которого являются линейными комбинациями фазовых координат x_i и компонент управления u_i, т. е. будем считать, что

$$y = \begin{cases} G_1(t)x + D_1(t)u, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ G_2(t)x + D_2(t)u, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots \\ G_m(t)x + D_m(t)u, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.3}$$

где $G_k(t), D_k(t)$ — непрерывные матрицы размерностей $(s \times n)$ и $(s \times r)$ соответственно. Здесь и далее верхний индекс « T » означает операцию транспонирования.

Предполагается, что компоненты y_i вектора y доступны наблюдению (измерению) на отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и, следовательно, по данным измерений известны функции $y_i = y_i(t)$, $(i = 1, \ldots, s)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Задача наблюдения состоит в том, чтобы по полученным результатам наблюдения (измерения) (1.3), т. е. по известной функции $y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_s(t)\big)^T$ определить значения вектор-функции $x(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$, являющейся решением уравнения (1.1) при известной $u(t)$.

Решение системы (1.1) с условием (1.2) для $t \in [t_{k-1}, t_k)$ представляется в виде [9]

$$x(t) = V_k(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V_k(t, t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t} H_j[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]u(\tau)d\tau, \tag{1.4}$$

где

$$V_k(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}]V_{k-1}(t_{k-1}, t_j),$$

$$V_k(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \quad (k = 1, \ldots, m; j = 0, \ldots, k-1) \tag{1.5}$$

$H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau]B_k(\tau)$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части k-го уравнения системы (1.1), $x(t_0)$ — неизвестное начальное состояние системы. Отметим, что согласно введенному обозначению [9] (1.5) при $j = k-1$, $V_k[t_k, t_{k-1}] = X_k[t_k, t_{k-1}]$, а при $j = k$, $V_k[t_k, t_k] = E$.

Согласно формулам (1.3) и (1.4) при $t \in [t_{k-1}, t_k)$ $k = 1, \ldots, m-1$ будем иметь

$$y(t) - G_k(t) \sum_{j=1}^{k-1} V_k(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau] u(\tau) d\tau - \int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau] u(\tau) d\tau -$$

$$-D_k(t) u(t) = G_k(t) V_k(t, t_0) x(t_0) \quad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{1.6}$$

Таким образом, т. к. предполагается, что функция $u(t)$ известна, то для всех $t \in [t_0, T]$ левая часть соотношения (1.6) является известной. Учитывая, что начальное состояние системы $x(t_0)$ неизвестно, возникает вопрос, можно ли восстановить значение $x(t_0)$ по полученным результатам наблюдений.

Так как левая часть (1.6) известна, следовательно, для решения вопросов наблюдения вместо уравнений (1.1) и (1.3) достаточно рассматривать однородные уравнения $(u(t) \equiv 0)$

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2(t)x, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ & \vdots \\ A_m(t)x, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.7}$$

$$y = \begin{cases} G_1(t)x, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ G_2(t)x, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ & \vdots \\ G_m(t)x, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{1.8}$$

Решение (1.4) системы (1.1), в этом случае, для системы (1.7) при $t \in [t_{k-1}, t_k)$ принимает следующий вид

$$x(t) = V_k(t, t_0) x(t_0), \tag{1.9}$$

а по результатам измерения будем иметь

$$y(t) = G_k(t) V_k(t, t_0) x(t_0), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (k = 1, \ldots, m-1). \tag{1.10}$$

Для того чтобы знать (восстановить) функцию $x(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ достаточно по данным измерения $y(t)$ (1.10) на отрезке времени $[t_0, T]$ определить начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.7).

О п р е д е л е н и е. Поэтапно меняющаяся система (1.1) (или (1.7)), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне наблюдаемой по данным измерения (1.3) (или (1.8)) на отрезке времени $[t_0, T]$, если по известным функциям $u(t)$ и $y(t)$, $t \in [t_0, T]$, можно определить (восстановить) состояние $x(t_0)$ системы.

Задачу наблюдения поэтапно меняющейся линейной системы можно сформулировать следующим образом.

По данным наблюдения (измерения) известна вектор-функция $y(t)$, $t \in [t_0, T]$, и представляется в виде (1.10). Требуется найти вектор $x(t_0)$ начального состояния фазового вектора $x(t)$ системы (1.7), определяемого уравнением (1.9).

Если любое начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.7) можно определить по известной на отрезке времени $[t_0, T]$ вектор-функции $y(t)$, представленной в виде (1.10), то система (1.7), (1.8) (с промежуточными условиями (1.2)) называется наблюдаемой на этом отрезке времени.

Возможность восстановления начального состояния $x(t_0)$ системы по некоторой наблюдаемой линейной операции над ее выходом называется наблюдаемостью.

2. Условие наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных систем. Доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы поэтапно меняющаяся линейная система (1.7) с промежуточными условиями (1.2) и с наблюдаемой величиной (1.8) была вполне наблюдаемой на отрезке времени* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$M(t_0, t_1, \ldots, T) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k-1}^{m} V_k^T(t, t_0) G_k^T(t) G_k(t) V_k(t, t_0) dt \tag{2.1}$$

где

$$V_k(t, t_0) = X_k[t, t_{k-1}] V_{k-1}(t_{k-1}, t_0), \quad V_k(t_k, t_0) = \prod_{i=0}^{k-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \quad (k = 1, \ldots, m-1)$$

была неособой матрицей.

Матрица $M(t_0, t_1, \ldots, T)$ имеет размерность $(n \times n)$. Если матрица $M(t_0, t_1, \ldots, T)$ неособая $(\det M(t_0, t_1, \ldots, T) \neq 0,)$ то существует обратная матрица $M^{-1}(t_0, t_1, \ldots, T)$, и тогда начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.7) представляется в виде

$$x(t_0) = M^{-1}(t_0, t_1, \ldots, T) Z(t_0, t_1, \ldots, T), \tag{2.2}$$

где

$$Z(t_0, t_1, \ldots, T) = \int_{t_0}^{t} \sum_{k-1}^{m} V_k^T(t, t_0) G_k^T(t) y(t) dt.$$

Далее по формуле (1.9) можно определить решение системы (1.7), т. е.

$$x(t_0) = V_k(t, t_0) M^{-1}(t_0, t_1, \ldots, T) Z(t_0, t_1, \ldots, T), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Таким образом, если матрица $M(t_0, t_1, \ldots, T)$ (2.1) неособая, то поэтапно меняющаяся система (1.7) (с промежуточными условиями (1.2)), с наблюдаемым вектором (1.8) вполне наблюдаема на отрезке времени $[t_0, T]$.

3. Условие наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных стационарных систем. Предположим, что система (1.1), (1.3) стационарна, следовательно стационарна и система (1.7), (1.8), т. е. она имеет вид

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ A_2 x, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ & \vdots \\ A_m x, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}, \tag{3.1}$$

$$y = \begin{cases} G_1 x, & \text{при } t \in [t_0, t_1) \\ G_2 x, & \text{при } t \in [t_1, t_2) \\ & \vdots \\ G_m x, & \text{при } t \in [t_{m-1}, T] \end{cases}, \tag{3.2}$$

где A_k, G_k $(k = 1, \ldots, m)$ постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(s \times n)$ соответственно.

Требуется найти условия полной наблюдаемости системы (3.1), (3.2) на отрезке времени $[t_0, T]$, выраженные непосредственно через матрицы A_k, и G_k $(k = 1, \ldots, m)$.

Доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы система (3.1) с промежуточными условиями (1.2) и наблюдаемой величиной (3.2) была вполне наблюдаема на отрезке времени* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$S = \big(C_1^T G_1^T, C_1^T A_1^T G_1^T, \ldots, C_1^T (A_1^T)^{p_1-1} G_1^T, \ldots, C_m^T G_m^T, C_m^T A_m^T G_m^T, \ldots, C_m^T (A_m^T)^{p_m-1} G_m^T\big) \tag{3.3}$$

был равен n, *где*

$$C_k = e^{-A_k t_{k-1}} V_{k-1}(t_{k-1}, t_0), \quad V_k(t_k, t_0) = \prod_{i=0}^{k-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}], \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{3.4}$$

а числа p_k *обусловлены кратностями собственных значений матрицы* A_k, $(k = 1, \ldots, m)$. *Размерность матрицы* S *равна* $(n \times q)$, *где* $q = \sum\limits_{k-1}^{m} p_k$. *Будем предполагать, что число столбцов матрицы* S, *т. е.* $q \geqslant n$.

Матрицу (3.3) будем называть матрицей наблюдаемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы.

Если учитывать, что постоянные матрицы (3.4) с размерностями имеют максимальный ранг, т. к. являются произведением фундаментальных матриц решения системы (3.1), то ранг матрицы наблюдаемости (3.3) равен рангу матрицы без произведения на матрицу C_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ т. е.

$$S = \big(G_1^T, A_1^T G_1^T, (A_1^T)^2 G_1^T, \ldots, (A_1^T)^{p_1-1} G_1^T, \ldots, G_m^T, A_m^T G_m^T, (A_m^T)^2 G_m^T, \ldots, (A_m^T)^{p_m-1} G_m^T\big). \tag{3.5}$$

Следовательно, условие (3.3) вполне наблюдаемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы, т. е. теорему 2 можно сформулировать в следующем виде.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы система (3.1) с промежуточными условиями (1.2) и наблюдаемой величиной (3.2) была вполне наблюдаема на отрезке времени* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (3.5) был равен* n.

С л е д с т в и е. *Если все собственные значения матрицы* A_k $(k = 1, \ldots, m)$ *являются простыми, то для того чтобы система (3.1) с промежуточными условиями (1.2) и наблюдаемой величиной (3.2) была вполне наблюдаемой на отрезке времени* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$S = \big(G_1^T, A_1^T G_1^T, (A_1^T)^2 G_1^T, \ldots, (A_1^T)^{n-1} G_1^T, \ldots, G_m^T, A_m^T G_m^T, (A_m^T)^2 G_m^T, \ldots, (A_m^T)^{n-1} G_m^T\big). \tag{3.6}$$

был равен n.

З а м е ч а н и е. Отметим, что из полученного условия вполне наблюдаемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы (3.1) с промежуточными условиями (1.2) и наблюдаемой величиной (3.2) можно получить известное условие вполне наблюдаемости линейных стационарных систем [1–5]. Действительно, если рассматривать систему

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Gx, \quad t \in [t_0, T],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, размерности матрицы A и G, соответственно, равны $(n \times n)$ и $(s \times n)$, то для вполне наблюдаемости этой системы, согласно теореме 3, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$(G_1^T, A_1^T G_1^T, (A_1^T)^2 G_1^T, \ldots, (A_1^T)^{n-1} G_1^T)$$

был равен n.

Отметим, что число столбцов в матрице наблюдаемости (3.5) (или (3.6)) намного больше чем число строк (т. е. чем требуемый максимальный ранг). Следовательно, линейно независимые столбцы в матрице наблюдаемости (3.5) (или (3.6)) могут иметь произвольные расположения среди столбцов этой матрицы, т. е. они могут быть некоторыми столбцами, расположенными в подматрицах (блоках), образованных парами матриц $\{A_1, G_1\}, \{A_2, G_2\}, \ldots, \{A_m, G_m\}$. Не исключено также, что все линейно независимые столбцы могут быть расположены в подматрице, образованной одной парой матриц $\{A_k, G_k\}$ $(k = 1, \ldots, m)$ или несколькими парами матриц. Это означает, что ранги всех подматриц (матриц наблюдаемости) по отдельности, образованных парами матриц $\{A_k, G_k\}$ $(k = 1, \ldots, m)$ могут быть не максимальными несмотря на то, что матрица (3.5) (или (3.6)) имеет максимальный ранг или ранг подматриц, образованных одной парой $\{A_k, G_k\}$, или одновременно ранги нескольких подматриц, образованных несколькими парами матриц, могут совпадать с максимальным рангом матрицы (3.5) (или (3.6)).

Таким образом, на отдельных отрезках времени $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$ по отдельности все подсистемы, которые образуют поэтапно меняющуюся наблюдаемую систему могут быть не вполне наблюдаемыми, а поэтапно меняющаяся наблюдаемая система может быть вполне наблюдаемой на отрезке времени $[t_0, T]$. А если хотя бы одна подсистема из поэтапно меняющейся системы на своем отрезке времени функционирования вполне наблюдаема, то соответствующая система также будет вполне наблюдаемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Труды 1 Конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521-547.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

4. *Ройтенберг. Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.

5. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.

6. *Забелло Л.Е.* Об управляемости линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 13-19.

7. *Барсегян Т.В.* Об условии вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы // Известия НАН РА. Механика. 2015. № 1. С. 81-90.

8. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред // Труды 8 международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт. С. 83-87.

9. *Barseghyan V.R.* Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. V. 22. № 1. P. 31-39.

10. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems // Springer, 2003. 220 p.

11. *Hong Shi and Guangming Xie.* Controllability and Observability Criteria for Linear Piecewise Constant Impulsive Systems // Journal of Applied Mathematics. Volume 2012 (2012), Article ID 182040. http: //dx.doi.org/10.1155/2012/182040.

12. *Dengguo Xu.* Controllability and Observability of a Class of Piecewise Linear Impulsive Control Systems // Advances in Computer, Communication, Control and Automation. LNEE. 2012. V. 121. P. 321-328.

Поступила в редакцию 17 июня 2015 г.

Barseghyan V.R. ABOUT CONDITIONS OF OBSERVABILITY OF GRADUALLY CHANGING CONTROLLABLE LINER SYSTEMS

A possibility of full recovery phase coordinates of gradually changing linear system on results of incomplete measure is researching. A condition of necessary and sufficient for complete observability gradually changing linear unstationary and stationary systems is obtained. This one shown that in separate segment of time gradually changing system formed not quite observable stationary systems, can be fully observed in all interval of time.

Key words: gradually changing linear system; measurement; quite observable; conditions of quite observable.

Барсегян Ваня Рафаелович, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, e-mail: barseghyan@sci.am

Barseghyan Vanya Rafaelovich, Yerevan State University, Yerevan, Armenia, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher of the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of RA, e-mail: barseghyan@sci.am

УДК 519.876.5 + 517.956.225

ФРОНТ ВЫХОДА В МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТОЛПЫ ПРИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ

© **А.Л. Бекларян**

Ключевые слова: фронт выхода; динамика толпы; агентное моделирование; уравнение Лапласа.

В статье рассматривается непрерывная стохастическая агентная модель движения людей в ограниченном пространстве с заданной геометрией, основанная на феноменологическом подходе. Определяется понятие «фронта выхода», изучаются характеристики потока агентов, в частности, его интенсивность.

Введение

Одна из ключевых составляющих жизнедеятельности человека, особенно в крупных городах, заключена в безопасности движения в условиях ограниченного пространства и большого скопления других движущихся людей. Подобная проблема становится особенно актуальной при пользовании общественным транспортом, при проведении культурно-массовых мероприятий, на митингах и при других неотъемлемых эпизодах повседневной жизни человека. Отдельно стоит отметить проблему эвакуации людей из зданий при чрезвычайных ситуациях (ЧС).

Очевидно, проведение реальных экспериментов для решения таких проблем сопряжено с большими организационными сложностями и финансовыми затратами. Отсюда возникает необходимость математического моделирования описанных процессов и проведения компьютерных экспериментов, чтобы максимально эффективно выстроить процесс ликвидации ЧС.

1. Анализ существующих моделей

Несмотря на высокий интерес к проблематике, долгое время основные работы по данной теме были посвящены психологическим и социальным аспектам вопроса. Например, в работе [1] детально описаны условия и причины возникновения паники, которые сводятся к доминированию коллективного бессознательного как основного фактора. То есть солидная часть исследователей рассматривает толпу с фрейдистской точки зрения, основанной на гипотезе, что люди как часть толпы действуют иначе, чем люди как индивиды. Совокупность разумов членов группы синергируются в некий коллективный разум. Соответственно, и предлагаемые решения проблемы возникновения паники также основаны на таком подходе, который мы назовем наивным.

На фоне описанных исследований изучение толпы с привлечением математических моделей началось сравнительно недавно. Здесь стоит отметить работы пионера этой области —